MATEMATIKA

ALGEBRA

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

A PUSKÁZÁS CSALÁSNAK MINŐSÜL.
A PUSKÁK VIZSGÁN TÖRTÉNŐ HASZNÁLATÁT NEM AJÁNLJUK!

Tartalomjegyzék

1. A matematikai logika elemei

1.1. Az ítéletkalkulus elemei

Értelmezés. **Ítéletnek** nevezünk egy jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
Megjegyzés. Egy ítélet nem lehet egyidőben igaz is és hamis is és az sem lehetséges, hogy igaz se és hamis se legyen.
Értelmezés. Egy ítélethez egyértelműen hozzérendelhetjük az 1 vagy 0 **logikai értéket**: ha az ítélet igaz, akkor logikai értéke 1, ha hamis, akkor logikai értéke 0 (itt az „1" és "0" szimbólumokat és nem számokat jelölnek).
Jelölés. Az ítéletek jelölésére a p, q, r, ... kisbetűket használjuk.

Példa. Ítéletek: „Minden négyzetben van derékszög."- igaz, logikai értéke 1;
„Egy háromszög szögeinek mértékének összege 110°."- hamis, logikai értéke 0;
„Az egyenlő oldalú háromszögben az oldalak kongruensek." -igaz, logikai értéke 1.

Nem ítéletek: „$x+3=10$"- nem lehet eldönteni, hogy igaz vagy hamis: létezik olyan x érték, amelyre igaz ($x=7$) és van olyan x is, amelyre hamis (például az $x=1$);
„Egy háromszögben az oldalak kongruensek."- az egyenlő oldalú háromszög esetében igaz, minden más esetben hamis.

Ítélet tagadása

Értelmezés. A p ítélet **tagadása** a „non p" ítélet (jelölés: $\neg p$ vagy $\overline{p}$), amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Logikai értéktáblázat:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Megjegyzés. A p és $\neg(\neg p)$ ítéletek logikai értéke megegyezik. Szóbeli közlésben a tagadást általában a „nem" szóval fejezzük ki.

Példa. A p: „Kettő plusz három nagyobb négynél." igaz ítélet tagadása a
$\neg p$: „Kettő plusz három nem nagyobb négynél." hamis ítélet.
Matematikailag ezt így írjuk le: p: „$2+3>4$", $\neg p$: „$2+3 \not> 4$".
A „Minden kutya fekete." hamis ítélet tagadása a „Van olyan kutya, amely nem fekete." igaz állítás.

Ítéletek konjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **konjunkciója** a „p és q" ítélet (jelölés: $p \wedge q$), amely csak akkor igaz, ha mind a p, mind a q igaz (ha p és q közül legalább az egyik hamis, akkor $p \wedge q$ hamis).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a konjunkciót általában az „és" szóval fejezzük ki.

Ítéletek diszjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **diszjunkciója** a „ p vagy q” ítélet (jelölés: $p \vee q$), amely csak akkor hamis, ha mind a p, mind a q hamis (ha p és q közül legalább az egyik igaz, akkor $p \vee q$ igaz).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a diszjunkciót általában a „vagy” szóval fejezzük ki.

Értelmezés. A $p, q, r, \ldots$ egyszerű ítéletekből a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikai operátorok véges számú alkalmazásával alkotott új ítéleteket **összetett ítéleteknek** nevezzük.

Megjegyzés. Az ítéletkalkulus azt vizsgálja, hogy egy összetett ítélet logikai értéke hogyan függ az őt alkotó egyszerű ítéletek logikai értékétől.

2. Valós számok

2.1. Valós számhalmazok

Jelölés. $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ a **természetes számok halmaza**;
$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ az **egész számok halmaza**;
$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$ a **racionális számok halmaza**;
$\mathbb{R}$ a **valós számok halmaza**;
$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ az **irracionális számok halmaza**;
$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Megjegyzés. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$.

Az összeadás tulajdonságai

- *asszociativitás:* $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *kommutativitás:* $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *semleges elem létezése*: $\exists 0\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $x+0=0+x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *minden egész (racionális, valós) számnak van ellentettje:* $\forall x\in\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ esetén $\exists(-x)\in\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ úgy, hogy $x+(-x)=0$.

A szorzás tulajdonságai

- *asszociativitás:* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$;
- *kommutativitás:* $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$;
- *semleges elem létezése*: $\exists 1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}\ (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$;
- *minden nemnulla racionális (valós) számnak van inverze:*
$$\forall x \in \mathbb{Q}^*\ (\mathbb{R}^*) \text{ esetén } \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*\ (\mathbb{R}^*)$$
úgy, hogy $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$;
- a szorzás disztributív az összeadásra nézve:
$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(x+y)z = xz + yz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Feladat. *Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.*

M. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ekkor léteznek az $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ számok úgy, hogy $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a}{b}$ irreducibilis. Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve $2 = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$, így a^2 páros $\Rightarrow a$ is páros $\Rightarrow a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Behelyettesítve,

$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$, azaz b^2 is páros $\Rightarrow b$ is páros $\Rightarrow b = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Mivel $a = 2k$, $b = 2l$, az $\dfrac{a}{b}$ tört egyszerüsíthető 2-vel, ez pedig ellentmond feltételezésünknek. Tehát $\sqrt{2}$ nem lehet racionális.

Oszthatóság

Értelmezés. Az a egész szám **osztható** a b egész számmal, ha létezik egy olyan c egész szám, amelyre $a = b \cdot c$.

Jelölés. $a \vdots b$ („a osztható b-vel") vagy $b | a$ („b osztja a-t").

Tétel. (*Maradékos osztás tétele*) Ha $a \in \mathbb{N}$ és $b \in \mathbb{N}^*$, akkor léteznek és egyértelműek a $q, r \in \mathbb{N}$ számok úgy, hogy $a = bq + r$ és $0 \leq r < b$.

Tétel. Ha $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, akkor

- ha $a | b$ és $b | c$, akkor $a | c$ (*tranzitivitás*);
- ha $a | b$ akkor $ma | mb$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$;
- ha $a | b$ és $a | c$, akkor $a | mb + nc$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Értelmezés. Egy $p \geq 2$ számot **prímszámnak** nevezünk, ha csak 1-gyel és önmagával osztható (nincs valódi osztója).

Tizedes törtek

Értelmezés. Egy $\overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$ alakú tizedes tört

- **véges tizedes tört**, ha a tizedesvessző után véges sok számjegy áll;
- **tiszta szakaszos tizedes tört**, ha van olyan $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, amelyre $a_{n+p} = a_n, \forall n \geq 1$;
- **vegyes szakaszos tizedes tört**, ha van olyan $k, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $k \geq 2$, amelyre $a_{n+p} = a_n, \forall n \geq k$.

Példa. Véges tizedes tört: $-12,003$.
Tiszta szakaszos tizedes tört:
$13,248248248\ldots \overset{jel.}{=} 13,(248)$.
Vegyes szakaszos tizedes tört:
$-23,0487271271\ldots \overset{jel.}{=} -23,0487(271)$.

Tétel. Minden racionális szám átírható véges, tiszta szakaszos vagy vegyes szakaszos tizedes tört alakba.

Feladat. *Írjuk tizedes tört alakba a következő közönséges törteket:* $\dfrac{137}{40}, \dfrac{19}{21}, \dfrac{433}{330}$.

M. Elosztva a számlálót a nevezővel, $\dfrac{137}{40} = 137:40 =$

$=3,425$ (véges tizedes tört),
$\frac{19}{21}=19:21=0,904761904761\ldots=$
$0,(904761)$ (tiszta szakaszos tizedes tört),
$\frac{433}{330}=433:330=1,3121212\ldots=1,3(12)$
(vegyes szakaszos tizedes tört).

Tétel. Minden véges, tiszta szakaszos vagy vegyes szakaszos tizedes tört átírható közönséges tört alakba.

Feladat. *Írjuk közönséges tört alakba a következő tizedes törteket:* $3,25$*;* $1,335$*;* $0,(36)$*;* $-2,(693)$*;* $3,2(35)$*;* $1,01(2)$.
M. Véges tizedes tört átírása:

$$3,25=3\frac{25}{100}=3\frac{1}{4};\, 1,335=1\frac{335}{1000}.$$

Tiszta szakaszos tizedes tört átírása:

$$-2,(693)=-2\frac{693}{999}=-2\frac{77}{111},$$

$$0,(36)=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

Vegyes szakaszos tizedes tört átírása:

$$1,01(2)=1\frac{12-1}{900}=1\frac{11}{900},$$

$$3{,}2(35)=3\,\frac{235-2}{990}=3\,\frac{233}{990}.$$

Értelmezés. Az x valós szám **egész része** az a legnagyobb egész szám, amely kisebb vagy egyenlő x-nél (jelölése: $[x]$):

$$[x]=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\leq x<k+1.$$

Értelmezés. Az x valós szám **törtrésze** a $\{x\}=x-$ $-[x]\in[0,1)$ szám.

Feladat. *Határozzuk meg a $\sqrt{29-3\sqrt{2}}$ szám egész-és törtrészét!*

M. $4\leq\sqrt{29-3\sqrt{2}}\overset{|()^2}{\Leftrightarrow}16\leq 29-3\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}\leq 13\overset{|()^2}{\Leftrightarrow}18\leq 169,$$

$$\sqrt{29-3\sqrt{2}}<5\overset{|()^2}{\Leftrightarrow}29-3\sqrt{2}<25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4<3\sqrt{2}\overset{|()^2}{\Leftrightarrow}16<18.$$

Tehát $4\leq\sqrt{29-3\sqrt{2}}<5$, azaz

$$\left[\sqrt{29-3\sqrt{2}}\right]=4,$$

$$\left\{\sqrt{29-3\sqrt{2}}\right\}=$$

$$=\sqrt{29-3\sqrt{2}}-\left[\sqrt{29-3\sqrt{2}}\right]=$$

$$= \sqrt{29 - 3\sqrt{2}} - 4.$$

Értelmezés. Az x valós szám **modulusza** (abszolút értéke)

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0 & \text{„pozitív szám modulusza önmaga"} \\ -x, \text{ ha } x < 0 & \text{„negatív szám modulusza a szám ellentettje".} \end{cases}$$

Feladat. *Oldjuk meg a* $|2x - 4| + |5 - x| = 3$ *egyenletet!*

M. A modulusz értelmezése alapján

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{, ha } 2x - 4 \geq 0 \\ -(2x - 4) & \text{, ha } 2x - 4 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x - 4 & \text{, ha } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{, ha } x < 2 \end{cases} \text{, illetve}$$

$$|5 - x| = \begin{cases} 5 - x & \text{, ha } 5 - x \geq 0 \\ -(5 - x) & \text{, ha } 5 - x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5 - x & \text{, ha } x \leq 5 \\ -5 + x & \text{, ha } x \geq 5 \end{cases} .$$

Az x-nek 2-höz és 5-höz való viszonya szerint három esetet különböztetünk meg.

I. Ha $x \in (-\infty, 2)$, akkor $|2x - 4| = -2x + 4$ és $|5 - x| = 5 - x$, így az egyenlet:
$-2x + 4 + 5 - x = 3 \Leftrightarrow x = 2 \notin (-\infty, 2)$,
tehát $M_1 = \emptyset$.

II. Ha $x \in [2, 5]$, akkor $|2x - 4| = 2x - 4$ és

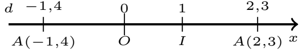
$|5-x|=5-x$, így az egyenlet: $2x-4+5-x=3 \Leftrightarrow x=2 \in [2,5]$, tehát $M_2=\{2\}$.

III. Ha $x \in (5,\infty)$, akkor $|2x-4|=2x-4$ és $|5-x|=-5+x$, így az egyenlet: $2x-4-5+x= =3 \Leftrightarrow x=4 \notin (5,\infty)$, tehát $M_3=\emptyset$.

A megoldáshalmaz $M=M_1 \cup M_2 \cup M_3=\{2\}$.

A valós számegyenes (számtengely)

Értelmezés. Valós számegyenesnek nevezünk egy olyan d egyenest, amelyen rögzített az O kezdőpont (origó), a pozitív irány és az egység.



Ha $\mathcal{D}$ jelöli a d egyenes pontjainak halmazát, akkor értelmezhető az $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ függvény: tetszőleges $A\in\mathcal{D}$ pont esetén legyen $f(A)$ az $[OA]$ szakasz előjeles hossza. Ez a függvény bijektív, inverze a $g:\mathbb{R}\to\mathcal{D}$ függvény: az $x\in\mathbb{R}$ szám esetén $g(x)=A(x)$, ahol $A(x)\in\mathcal{D}$ az a pont, amelyre $OA(x)=x$ (előjelesen). Ebben a felfogásban az $x\in\mathbb{R}$ szám modulusza úgy értelmezhető, mint az $[OA(x)]$ szakasz hossza.

4. Függvények

4.1. A függvény fogalma

Értelmezés. Legyen A és B két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy egy **függvényt** értelmeztünk az A halmazról a B halmazra, ha az A minden elemének megfeleltettük a B pontosan egy elemét. Az A halmazt a függvény **értelmezési tartományának** vagy **doméniumának**, a B halmazt a függvény **értékkészletének** vagy **kodoméniumának** nevezzük.
Jelölés. Ha f egy függvény A-ról B-re, ezt így jelöljük: $f : A \to B$. Ha az A halmaz x elemének az $y \in B$ elemet feleltettük meg, erre az $x \overset{f}{\mapsto} y$ vagy az $y = f(x)$ jelölést használjuk és azt mondjuk, hogy „y az x-nek az f általi képe".

Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{5, 6\}$ halmazok közt az $x \overset{f}{\mapsto} x+4$ megfeleltetés nem határoz meg egy függvényt, mert $3 \overset{f}{\mapsto} 7 \notin B$.

Az $A = \{1, 2, 4\}$ és $B = \mathbb{R}$ halmazok közt az „$x \mapsto y$, ahol $y^2 = x$" megfeleltetés nem határoz meg függvényt, mert az $x = 1$ értéknek a B halmazból nem csak egy elem felel meg: az $y_1 = 1 \in B$ és $y_2 = -1 \in B$ egyaránt teljesíti az $y_1^2 = y_2^2 = 1$ feltételt. Az $A \to \mathbb{R}_+$, „$x \mapsto y$, ahol $y^2 = x$" megfeleltetés egy függvény: $1 \mapsto 1$,

$2 \mapsto \sqrt{2}, 4 \mapsto 2.$

Ha A és B számhalmazok, egy $f : A \to B$ függvényt **számfüggvénynek** nevezünk, egy $x \in A$ szám esetén $f(x)$ neve: „az x behelyettesítési értéke".
Értelmezés. Ha $f : A \to B$, $C \subseteq A$, akkor az $f|_C : C \to B$, $f|_C(x) = f(x)$, $\forall x \in C$ függvény az f függvénynek a C halmazra való **leszűkítése**.

Példa. A $g : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$x \overset{g}{\mapsto} x + 4$ függvény értelmezési tartománya $\{1, 2, 3\}$ és értékkészlete $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. A behelyettesítési értékek: $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$,
$g|_{\{1,2\}} : \{1, 2\} \to \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$g|_{\{1,2\}} : 1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 6.$

Egy függvényt három elem határoz meg: az értelmezési tartomány (A), az értékkészlet (B) és a hozzárendelési törvény.
Értelmezés. Az $f : A \to B$ és $g : C \to D$ függvények **egyenlők**, ha e három összetevőjük megegyezik, azaz $A = C$, $B = D$ és $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} |x|$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$x \overset{g}{\mapsto} \sqrt{x^2}$ függvények egyenlők: értelmezési tartomá nyuk és értékkészletük megegyezik, $|x| = \sqrt{x^2}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Függvények megadási módjai

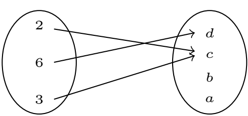
Az f függvény **szintetikusan értelmezett**, ha az értelmezési tartomány minden x eleme esetén megadjuk a hozzárendelt $y \in B$ elemet- ezt a fajta megadási módot általában akkor használjuk, ha az értelmezési tartománynak kis számú eleme van:

- Venn-Euler diagrammal,
- értéktáblázattal,
- a függvény grafikonjával.

Analitikusan értelmezett egy függvény akkor, ha az $x \in A$ elemnek megfelelő $y = f(x) \in B$ elemet egy hozzárendelési szabály (vagy valamely egyértelmű tulajdonság) segítségével adjuk meg- ez a szabály lehet

- egy képlettel (szabállyal) értelmezett (ez a leggyakoribb),
- több képlettel (szabállyal) értelmezett- az értelmezési tartomány diszjunkt részhalmazain különböző képleteket alkalmazunk,
- rekurziós képlettel értelmezett.

Példa. A mellékelt Venn-Euler-diagram azt az f függvényt jelöli, ahol $A = \{2, 6, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $2 \overset{f}{\mapsto} c$, $3 \overset{f}{\mapsto} c$, $6 \overset{f}{\mapsto} d$;



A

x	2	3	4
$g(x)$	11	2	11

táblázat azt a g függvényt jelöli, ahol $A=\{2,3,4\}$, $B=\{2,11\}$, $2\overset{g}{\mapsto}11$, $3\overset{g}{\mapsto}2$, $4\overset{g}{\mapsto}11$.

A $G_h=\{(a,3),(b,4),(c,4),(d,5)\}$ grafikon azt a h függvényt határozza meg, ahol $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{3,4,5\}$ és $a\overset{h}{\mapsto}3$, $b\overset{h}{\mapsto}4$, $c\overset{h}{\mapsto}4$, $d\overset{h}{\mapsto}5$.

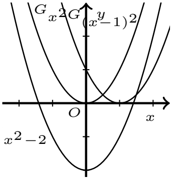
Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ azt az f függvényt jelöli, amely tetszőleges $a\in(0,\infty)$ elemnek a négyzetét felelteti meg, például $f(3)=3^2=9$, $f(11)=11^2=$ $=121$, de $\cancel{f(-5)}$ nem értelmezett, mert $-5\notin(0,\infty)$.

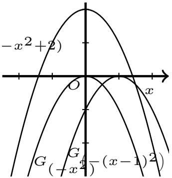
5.3. Másodfokú függvény

Értelmezés. Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ alakú függvényt, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, **másodfokú függvénynek** nevezünk.

Ha $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, az $f(x)=0$ egyenlet gyökei: $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Értelmezés. Egy másodfokú függvény grafikus képét **parabolának** nevezzük.





Monotonitás-táblázat

x	$-\infty$		$x_V=-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$a>0,\, f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$y_V=-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$a<0,\, f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$y_V=-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Előjel-táblázat

- $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a>0,\ f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$a<0,\ f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

- $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		$x_1 = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$a>0,\ f(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$a<0,\ f(x)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$

- $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$a>0,\ f(x)$	$+$	$+$	$+$
$a<0,\ f(x)$	$-$	$-$	$-$

Feladat. *Az f másodfokú függvény grafikus képe átmegy az $A(-1,12)$, $B(1,6)$, $C(3,16)$ pontokon. Határozzuk meg az f monotonitási intervallumait!*

M. Legyen a keresett függvény $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. $A,B,C\in G_f \Rightarrow$ $f(-1)=12$, $f(1)=6$, $f(3)=16$.
Az $a-b+c=12$, $a+b+c=6$, $9a+3b+c=16$ egyenletrendszer megoldása $a=2$, $b=-3$, $c=7$, így $f(x)=2x^2-3x+7$.

Figyelembe véve, hogy $a>0$ és $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{4}$, f szigorúan csökkenő a $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$ intervallumon és szigorúan növekvő a $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ intervallumon.

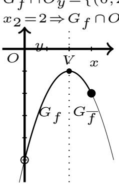
Parabola megrajzolása

A parabola megrajzolásakor a következőket vesszük figyelembe:

- ha $a > 0$, a parabola szárai felfele, ha $a < 0$, akkor lefele mutatnak;
- a parabola szimmetriatengelye az $x = -\frac{b}{2a}$ függőleges egyenes;
- ha $a > 0$, a függvénynek minimuma, ha $a < 0$, akkor maximuma van;
- a parabola csúcsa a $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ pont;
- az Oy tengellyel való metszéspont a $(0, c)$ pont;
- az Ox tengellyel való metszéspont:
  - ha $\Delta > 0$, két metszéspont van: $(x_1, 0)$ és $(x_2, 0)$;
  - ha $\Delta = 0$, a parabola érinti az Ox tengelyt a $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ pontban;
  - ha $\Delta < 0$, nincs metszéspont;
- tetszőleges x értékekre ábrázoljuk az $(x, f(x))$ pontokat.

Feladat. *Ábrázoljuk az* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *függvényt!*

M. $a=1, b=-3, c=2, f(0)=2 \Rightarrow$ $G_f \cap O_y=\{(0,2)\}, \Delta=1>0, x_1=1,$ $x_2=2 \Rightarrow G_f \cap Ox=\{(1,0),(2,0)\}.$



A parabola csúcsa $V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$. A grafikus kép szimmetria-tengelye az $x=\dfrac{3}{2}$ egyenes, a szárak felfele mutatnak. Mindezen adatokat egybevetve megrajzoljuk a grafikus képet.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az* $f_m(x)=mx^2+2(m+1)x+m+2, m \in \mathbb{R}^*$ *parabolacsalád csúcsai az* $y=x+1$ *egyenletű egyenesen vannak!*

M. Az f_m parabola csúcsa $V(x_V, y_V)$, ahol $x_V=-\dfrac{2(m+1)}{2m}=-\dfrac{m+1}{m}, \Delta=4,$

$y_V=-\dfrac{4}{4m}=-\dfrac{1}{m}$. A parabola csúcsa akkor van az $y=x+1$ egyenletű egyenesen, ha $y_V=x_V+1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{m}=-\dfrac{m+1}{m}+1 \overset{|\cdot m}{\Leftrightarrow} -1=$ $-(m+1)+m,$
ami igaz.

A másodfokú függvény tulajdonságai

Értelmezés	$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$
Képhalmaz	ha $a>0\Rightarrow$ $Imf=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$, $a<0\Rightarrow$ $Imf=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$
Metszéspontok a tengelyekkel	$G_f\cap Oy=\{(0,c)\}$ ha $\Delta>0$, akkor $G_f\cap Ox=\{(x_1,0),(x_2,0)\}$; ha $\Delta=0$, akkor G_f érinti az Ox-tengelyt a $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ pontban; ha $\Delta<0$, akkor $G_f\cap Ox=\emptyset$;
Periodicitás	nem periodikus
Paritás	ha $b\neq 0$, nem páros, nem páratlan ha $b=0$, páros, szimmetriatengelye $x=0$
Folytonosság	folytonos görbe
Aszimptoták	nincs
Korlátosság	ha $a>0$, alsó korlát: $-\frac{\Delta}{4a}$, felső korlát nincs ha $a<0$, alsó korlát nincs, felső korlát: $-\frac{\Delta}{4a}$