

## Cuprins

<b>1 Operații cu numere reale</b> .....	<b>1-4</b>
1.1 Radicali, Puteri.....	1-2
1.1.1 Puteri.....	1
1.1.2 Radicali.....	1-2
1.2 Identități.....	2-4
1.3 Inegalități.....	4
<b>2 Funcții</b> .....	<b>4-6</b>
2.1 Noțiunea de funcții.....	4-5
2.2 Funcții injective, surjective, bijective.....	5
2.3 Compunerea funcțiilor.....	5-6
2.4 Funcția inversă.....	6
<b>3 Ecuații și inecuații de gradul întâi</b> .....	<b>6-9</b>
3.1 Ecuații de gradul întâi.....	6-8
3.2 Modul unui număr real.....	8-9
<b>4 Funcții de gradul al doilea</b> .....	<b>10</b>
<b>5 Numere Complexe</b> .....	<b>10-14</b>
5.1 Forma algebrică.....	11
5.2 Puterile numărului $i$ .....	11
5.3 Conjugatul lui $z$ .....	11-12
5.4 Modul unui număr complex.....	12
5.5 Forma trigonometrică.....	12
5.6 Formula lui Moivre.....	13
5.7 Forma exponențială.....	13
5.8 Ecuația binomă.....	13-14
<b>6 Progresii</b> .....	<b>14</b>
6.1 Progresiile aritmetice.....	14
6.2 Progresiile geometrice.....	14
<b>7 Logaritmi</b> .....	<b>15-19</b>
7.1 Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale.....	17-18
7.2 Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale.....	18-19
<b>8 Geometrie Analitică</b> .....	<b>19-21</b>
8.1 Punctul.....	19
8.2 Distanța.....	19-20
8.3 Geometrie în spațiu.....	20-21
8.3.1 Punctul.....	20
8.3.2 Planul.....	20
8.3.3 Dreapta.....	20
8.3.4 Formule.....	21
<b>9 Metoda inducției matematice</b> .....	<b>21-22</b>
9.1 Axioma de recurență a lui Peano.....	21
9.2 Metoda inducției matematice.....	21-22
9.3 Variantă a metodei inducției matematice.....	22
<b>10 Analisă combinatorie</b> .....	<b>22-26</b>
10.1 Permutări.....	22
10.2 Aranjamente.....	23
10.3 Combinări.....	23-24
10.4 Binomul lui Newton.....	24-25
10.5 Suma puterilor asem. ale primelor $n$ numere nat. ....	25-26
<b>11 Polinoame</b> .....	<b>26-29</b>

11.1 Forma algebrică a unui polinom .....	26
11.2 Divizibilitatea polinoamelor .....	26-27
11.3 Rădăcinile polinoamelor .....	27-28
11.4 Ecuații algebrice .....	28-29
11.5 Polinoame cu coeficienți din $R, Q, Z$ .....	29
<b>12 Permutări, matrici, determinanți</b> .....	<b>29-37</b>
12.1 Permutări .....	29-31
12.2 Matrici .....	31-33
12.3 Determinanți .....	33-34
12.4 Inversa unei matrici .....	34-37
12.4.1 $\text{Tr}(A)$ .....	34-35
12.4.2 Determinantul și rangul .....	35-37
<b>13 Sisteme liniare</b> .....	<b>37-39</b>
13.1 Notății .....	37-38
13.2 Compatibilitatea .....	38
13.3 Sisteme omogene ( $b_i = 0$ ) .....	38-39
<b>14 Trigonometrie</b> .....	<b>39-42</b>
14.1 Formule Trigonometrice .....	39-42
<b>15 Analiză Matematică</b> .....	<b>42-81</b>
15.1 Recurențe .....	42
15.1.1 Recurențe de ordin 1 .....	42
15.1.2 Recurențe de ordin al doilea .....	42
15.2 Limita de siruri .....	42-47
15.2.1 Limite generale, Criterii de convergență .....	44-47
15.3 Limite de funcții .....	47-51
15.4 Continuitatea funcțiilor .....	51-54
15.4.1 Teoreme pentru continuitatea funcțiilor .....	52-54
15.5 Funcții derivabile .....	55-60
15.5.1 Definiția derivatei într-un punct .....	55
15.5.2 Reguli de derivare .....	55-56
15.5.3 Derivatele funcțiilor elementare .....	56-57
15.5.4 Derivatele funcțiilor compuse .....	57-58
15.5.5 Derivatele de ordin sup. ale unor funcții elem. .....	58-59
15.5.6 Proprietăți ale funcțiilor derivabile .....	59-60
15.6 Integrale .....	60-74
15.6.1 Primitive .....	60-74
15.7 Integrale Definite .....	74-80
15.7.1 Definiția integrabilității .....	74-75
15.7.2 Proprietăți ale integralei definite .....	75-77
15.7.3 Teorema Fundamentală .....	77-78
15.7.4 Inegalități .....	78-80
15.8 Alte Teoreme .....	80-81
15.8.1 Funcții primitivabile .....	80-81
15.8.2 Funcții integrabile .....	81
<b>16 Structuri Algebrice</b> .....	<b>81-90</b>
16.1 Grupuri .....	81-85
16.1.1 Proprietăți și Teoreme .....	82-85
16.2 Monoid .....	85
16.3 Inel .....	85-87
16.4 Corp .....	87-89
16.5 Spații vectoriale .....	89-90

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

3.) *Transpusa unei matrici:*

Fie  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  atunci  ${}^t A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$   
unde  ${}^t a_{ij} = a_{ji}, \forall (i, j) \in M \times N$ .

4.) *Înmulțirea matricelor:*

Fie  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$   
atunci  $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ , unde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \forall (i, j) \in M \times N \text{ este}$$

produsul lor.

*Proprietăți:*

a.)  $(AB)C = A(BC)$ ;

b.)  $AI_n = I_n$  (element neutru matricea

unitate)  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in$

$M_{m,n}(\mathbb{C})$ ;

c.)  $(A + B)C = AC + BC$ ;

d.)  $A(B + C) = AB + AC$ .

### 12.3 Determinanți

Fie  $M_n(\mathbb{C})$  mulțimea matricilor pătrate  
de ordin  $n$  cu elemente din  $\mathbb{C}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C});$$

**Definiția 12.7.** Se nește **determinantul** matricii  $A$  numărul  $\det A =$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ , unde  $A_{ij}$  este complementul algebric al elementului  $a_{ij}$ .

Dacă  $C = AB$ , atunci  $\det C = \det A \cdot \det B$  ( $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ ).

Determinantul de ordin 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantul de ordin 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

## 12.4 Inversa unei matrici

Fie  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , dacă  $\det A \neq 0$  există  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$  a.î.  $AA^{-1} = I_n$ ,  $I_n$  matricea unitate.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

### 12.4.1 $\text{Tr}(A)$

$$1) \text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B);$$

- 2)  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ;
- 3)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;
- 4)  $(AB)^t = B^t A^t$ ;
- 5)  $B^2 = B$  atunci  $B$  este idempotent;
- 6)  $X^2 - (\text{Tr}X)X + (\det X)I_2 = 0_2$ ;
- 7)  $\det A^t = \det A$ ;
- 8)  $\det(A^t + I_n) = \det(A + I_n)$ ;
- 9)  $AA^* = A^*A = (\det A)I_n$ .

#### 12.4.2 Determinantul și rangul

- 1) Dacă schimbăm două rânduri în matricea  $A$  atunci semnul determinantului se schimbă;
- 2) Dacă înmulțim un rând a matricii cu numărul real  $\alpha$  atunci și determinantul se înmulțește cu  $\alpha$ ;
- 3) Dacă o matrice are două rânduri egale sau proporționale atunci determinantul este 0;
- 4)  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ ;
- 5)  $A + A^t = 0_n \Leftrightarrow \det A = 0$  (matrice antisimetrică);
- 6)  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ ;

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

2.) Sunt compatibile nedeterminate dacă  $r < n$ .

## 14 Trigonometrie

### 14.1 Formule Trigonometrice

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$2) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$3) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$4) \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$5) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$6) \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$7) \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$8) \tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$9) \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$$

$$10) \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y);$$

$$11) \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)};$$

$$12) \cot(x + y) = \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)};$$

$$13) \sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x);$$

$$14) \cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y);$$

$$15) \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)};$$

$$16) \cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cot(y) + 1}{\cot(y) - \cot(x)};$$

$$17) \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x);$$

$$18) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1;$$

$$19) \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

$$20) \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x);$$

$$21) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}};$$

$$22) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}};$$

$$23) \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos(x)}};$$

$$24) \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos(x)}};$$

$$25) \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

### 15.2.1 Limite generale, Criterii de convergență

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e;$

4) Fie  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , și

$\tilde{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Atunci  $e_n \leq e_{n+1}$ ,  
și  $\tilde{e}_n \geq \tilde{e}_{n+1}$ ;

5)  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1;$

6)  $c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$  este convergent și limita sa este  $c$  constantul lui Euler;

7) Dacă  $\lim x_n = \infty$  atunci  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e;$

8) Dacă  $\lim x_n = 0$  atunci  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e;$

9) Dacă  $\lim x_n = 0$  atunci  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a;$

9') Dacă  $\lim x_n = 0$  atunci  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1;$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \frac{1}{e}$$

$$11) \text{ (Cesaro-Stolz) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \text{ dac\u0103 } b_n$$

este monoton \u015fi nu este m\u0103rginit;

12) Dac\u0103  $\lim x_n = \ell$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \ell;$$

13) Dac\u0103  $\lim x_n = \ell$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \ell;$$

14) (Cauchy-D'Alambert) Dac\u0103 exist\u0103

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}, \text{ atunci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

;

$$15) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1;$$

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e;$$

$$17) \text{ Dac\u0103 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_{n+k} = b,$$

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

derivabilă în  $x_0 \in I$  și  $g$  este derivabilă în  $y_0 = f(x_0)$ , atunci  $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$

6) dacă  $f : I \rightarrow J$  este continuă, bijectivă, și derivabilă în  $x_0$ , cu  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

este derivabilă în  $y_0$ ,  $y_0 = f(x_0)$  și

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### 15.5.3 Derivatele funcțiilor elementare

1)  $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ ;

2)  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ ;

3)  $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$ ;

4)  $f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;

5)  $f(x) = \ln(x), x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ ;

6)  $f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$ ;

7)  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ ;

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

3) Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  primitivabilă,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă cu derivata continuă,  $g(x) \neq 0$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $g$  atunci  $f \circ h$  e primitivabilă.

4) Dacă

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ f_2, & x \in [a, b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

e primitivabilă atunci  $f_1 = f_2$  și sunt continue.

### 15.8.2 Funcții integrabile

1) Funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă dacă și numai dacă mulțimea punctelor discontinue este numerabilă.

2) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă atunci e integrabilă pe orice  $[c, d] \subseteq [a, b]$ ,

3) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotonă atunci e integrabilă.

4) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  itegrabilă și Darboux atunci  $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

5) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă, atunci  $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$ .

## 16 Structuri Algebrice

### 16.1 Grupuri

Un cuplu  $(G, \circ)$ , format dintr-o mulțime nevidă  $G$  și o lege de compoziție internă

Comandă versiunea completă, tipărită de  
[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)

[www.fituici-bacalaureat.ro](http://www.fituici-bacalaureat.ro)